جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة التكميلية للعام الدراسي 2015 - 2016
أسئلة مقرر الجبر (1)
سنة ثالثة رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $(Q, .)$ تشكل زمرة حيث Q مجموعة الأعداد النسبية (العادية).
(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_{16}(32)$ من الزمرة $U(32)$ يساوي عنصرين فقط.
(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(R, +)$ يساوي 2.
(4) رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر 8 من الزمرة $(Z_{12}, +)$ تساوي 4.
(5) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 15.
(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^9 في G تساوي 8.
(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(10)$ يساوي 4 زمر جزئية.
(8) إن عدد عناصر زمرة الخارج $U(18)/U_3(18)$ يساوي 3.
(9) إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكلاً وكان $Ker\,\varphi = \{1, 11\}$ و $\varphi(7) = 7$ فإن $\varphi^{-1}(7) = \{7, 11\}$.
(10) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{18} إلى الزمرة Z_{12} يساوي 3.
(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = \langle a \rangle$ والتي مرتبتها 30.
(12) كل زمرة من المرتبة 169 ليست تبديلية لأن 169 ليس عدد أولي.
(13) رتبة العنصر $(2, 6)$ من الزمرة $Z_{10} \oplus Z_{20}$ يساوي 20.
(14) إن $U(8) \cong U(10)$.

السؤال الثاني (23 درجة): لتكن $(G, .)$ زمرة ما، علل ما يلي:

(1) إذا كانت A , B زمرتين جزئيتين من G، بحيث $A \cup B$ زمرة جزئية من G عندئذ إما $A \subseteq B$ أو $B \subseteq A$.
(2) إذا كان $a, b \in G$، فإن $o(a . b) = o(b . a)$ (حيث $o(a . b)$ يعني رتبة $(a . b)$).
(3) إذا كان $a \in G$ مرتبته n وإذا وجد $k \in Z$ يحقق $a^k = e$ (e حيادي G)، فإن n يقسم k.

السؤال الثالث (35 درجة): لتكن G زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G. اثبت صحة ما يلي:

(1) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G.
(2) إذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة فإن الزمرة G تكون تبديلية.
(3) إذا كانت G منتهية وغير تبديلية مرتبتها p^3 حيث p عدد أولي وكان $Z(G) \neq \langle e \rangle$، فإن $(Z(G) : 1) = p$.
(4) إذا كانت G منتهية و p- زمرة (p عدد أولي) فإن كلاً من $Z(G)$ و $G/Z(G)$ هي p- زمـ

2016 - 8 - 30

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

د. إيمان الخوجه

سلم تصحيح مقرر الجبر 1/1/

الفصل الأول العام الدراسي 2015-2016

تاريخ الامتحان 7/2/2016

الجواب الأول [42 درجة] لكل بند 3 درجات،

1) خطأ، لأن (-) ليست تجميعية في Z.

2) خطأ، عنصرين فقط،

3) خطأ، مرتبة $i = 4$.

4) خطأ، $p-1$.

5) خطأ، تساوي 3.

6) خطأ، يساوي 4،

7) خطأ، تساوي 6،

8) صح

9) خطأ، يساوي $Q/\{0\}$.

10) خطأ، لأنه لا يوجد $(a,b) \in Z \oplus Z$ يولد جميع عناصر $Z \oplus Z$ حيث $a, b \in Z$.

11) خطأ، يساوي 6.

12) خطأ، يساوي 15

13) صح.

14) خطأ، مرتبة $U(14)$ تساوي 6 بينما مرتبة $Z_2 \oplus Z_2$ تساوي 4،

الجواب الثاني. [20 درجة] لكل بند 5 درجات،

(1) بما أن $eh = he, \forall h \in H$ فإن $e \in C(H) \neq \phi$. ليكن $x, y \in C(H)$، عندئذٍ

لكل $h \in H$ يكون $xh = hx$ و $yh = hy$ ومنه $y^{-1}h = hy^{-1}$

$(xy^{-1})h = x(y^{-1}h) = x(hy^{-1}) = (xh)y^{-1} = (hx)y^{-1} = h(xy^{-1})$ ومنه نجد بأن

$\Rightarrow xy^{-1} \in C(H)$ أي $C(H)$ زمرة جزئية من G،

(2) بما أن $b \in G$ فان $b^{-1} \in G$ ومنه
$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab) \Rightarrow a = b^{-1}(ab) \Rightarrow$
$ba = b(b^{-1})(ab) = ab$.

(3) G منتهيه ومرتبتها p (عدد اولي)، ان $G \neq \langle e \rangle$ ومنه يوجد
في G عنصر $x \neq e$. لنأخذ الزمره الجزئيه $\langle x \rangle$. بما أن $\langle x \rangle \neq \langle e \rangle$
فان $G = \langle x \rangle$ لأنه اذا الحالة $\langle x \rangle \neq G$ فإن مرتبة الزمره الجزئيه
$\langle x \rangle$ تقسم مرتبة الزمرة G حسب لاكرانج وهذا غير ممكن لان p اولي
اذن $G = \langle x \rangle$ أي G دوارة.

(4) بما أن $Z(G)$ زمرة جزئيه من G و G p- زمرة فان
$Z(G)$ p- زمرة.
وبما أن $Z(G)$ ناظمية في G فان $\frac{G}{Z(G)}$ هي p- زمرة ايضاً.

الجواب الثالث. 25 درجه.

(1) ليكن $x \in f^{-1}(g')$ عندئذ $f(x) = g' = f(g)$ ومنه $f(g^{-1}x) = e'$
أي $g^{-1}x \in \ker f$ وبالتالي أي $x \in g\ker f$ أي $f^{-1}(g') \subseteq g\ker f$.
ليكن $y \in g\ker f$ عندئذ $y = gx \in G$ حيث $x \in \ker f$ ومنه
$f(y) = f(g)f(x) = g'$ وهذا يبين أن $y \in f^{-1}(g')$ ومنه
$g\ker f \subseteq f^{-1}(g')$، مما سبق نجد
$f^{-1}(g') = g\ker f$

18

3

(2) نعرف العلاقة $\varphi : Z \longrightarrow Z_n$ كما يلي

10

$\forall m \in Z ;\ \varphi(m) = m \pmod n$

φ تطبيق وتشاكل لأنه $\forall x, y \in Z$ فإن

$\varphi(x+y) = (x+y) \bmod n = x \bmod n + y \bmod n = \varphi(x)+\varphi(y)$

φ غامر لأنه مهما يكن $s \in Z_n$ فإن $s \in Z$ و $s<n$ ومنه

$\varphi(s) = s \bmod n$ وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد بأن $Z/\ker\varphi \simeq Z_n$.

حيث $\ker\varphi = <n>$ زمرة جزئية ناظمية في Z فهي نواة لتشاكل منطلقه Z أي تساوي $\ker\varphi$.

(3) $\ker f = \{x : x \in Q^* ;\ f(x) = |x| = 1\}$

5 خمس درجات

$= \{x : x \in Q^* ;\ x = 1 \text{ or } x = -1\}$

$= \{1, -1\}$

الجواب الرابع: 13 درجة

مبرهنة سيلو الأولى: G زمرة منتهية و p عدداً أولياً. إذا كان p^k يقسم رتبة الزمرة G عندئذ فإن الزمرة G تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل رتبتها p^k . (3)

الزمرة الجزئية السيلوفية في G هي p- زمرة رتبتها أكبر قوة للعدد الأولي تقسم رتبة الزمرة G . (3)

دراسة الزمرة التي رتبتها 35 . $(G:1) = 7 \cdot 5$ ، عندئذ G تحوي

(7) 5- زمرة جزئية سيلوفية رتبتها 5 وأخرى 7- زمرة جزئية سيلوفية رتبتها 7

عدد جميع الـ 5- زمرة الجزئية السيلوفية التي رتبتها 5 هناك واحدة فقط ولتكن H وهي ناظمية

" الـ 7- " " " " " " 7 واحدة " ولتكن K وهي ناظمية في G

وكل منها دوارة .

انتهت الأجوبة

د. ابتسام الحلوة